

© О.В. Моржин, Е.С. Изюрьева

Россия, Улан-Удэ, Бурятский государственный университет

О реализации аппроксимации оптимального импульсного скользящего режима¹

Статья посвящена вычислительному эксперименту по реализации приближенного оптимального управления в одной вырожденной задаче (с линейным неограниченным управлением), полученным согласно теории обобщенного уравнения Беллмана и метода экстремального прицеливания.

© O.V. Morzhin, E.S. Izuryeva

On the implementation of optimal impulsive sliding rate approximation

This article is devoted to calculation experiment on embedding of approximating optimal control in one vacuous problem (with linear unrestricted control), which is created using the generalized Bellman equation theory and the method of extreme aiming.

Введение

Оптимальное управление в форме синтеза [9] имеет преимущество перед программным управлением, предоставляя управление для любого возможного начального состояния и обеспечивая обратную связь. Поэтому с 1960-х гг. значительные усилия ученых [1 – 12, 14] направлены на разработку теории, методов синтеза оптимального управления и их программно-алгоритмической реализации.

Во многих прикладных задачах и целых классах задач оптимального управления из различных областей, таких как механика космических аппаратов, управление колебаниями, техническая физика, экономика, экология, отсутствуют решения в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина для программных управлений, принципа динамического программирования Р. Беллмана для позиционных управлений. Теория вырожденных задач [1 – 6, 8, 10, 14] позволяет решать такие задачи. Предложены конструкции последовательностей, аппроксимирующих оптимальное управление:

а) для систем с ограниченным невыпуклым множеством скоростей – это последовательность режимов переключения управления между некоторыми базовыми значениями с неограниченно растущей частотой, стремящихся к скользящему режиму;

б) для систем с неограниченным множеством скоростей выявлены такие характерные решения, как импульсные, импульсно-скользящие и циклические скользящие режимы.

В работе [4] предложена схема аппроксимации оптимального управления в задачах с неограниченным множеством скоростей, основанная на теории обобщенного уравнения Беллмана и методе экстремального прицеливания (сдвига) [7].

В данной статье для одной типичной вырожденной задачи оптимального управления:

1) аналитически получена формула обобщенного члена последовательности, аппроксимирующей оптимальное управление;

2) численно для заданного начального состояния вычислены оптимальные программа и траектория.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза оптимального управления на отрезке $[0, t_F]$, $t_F = 3$ [4]:

$$I(u, x) = x_1(t_F) - x_2(t_F) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (x_1 - x_2)^2 + u, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00659, 07-01-90101).

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{u}, \quad x_3(0) = x_3^0, \quad (4)$$

$$-\infty < u(t) < +\infty, \quad t \in [0, t_F]. \quad (5)$$

Требуется построить минимизирующую последовательность $\{u_s(t, x)\}$, $s \in N$, и, задав x^0 , проинтегрировать систему на членах этой последовательности.

2. Построение минимизирующей последовательности $\{u_s(t, x)\}$, $s \in N$

Задача Коши для обобщенного уравнения Беллмана [3, с. 139]

$$\inf_x b'_y(2(y + x_2)x_2 + x_3^2) - b'_t = 0,$$

$$b'(t, y) = y, \quad y = x_1 - x_2,$$

имеет решение $b'(t, y) = \frac{y}{2y(t_F - t) + 1}$. Ма-

гистральное многообразие S , описывается набором $x_{1*} = \frac{y}{2}$, $x_{2*} = -\frac{y}{2}$, $x_{3*} = 0$. Следуя методу экстремального прицеливания (сдвига) [7], образуем последовательность $\{u_s(t, x)\}$, $s \in N$: $u_s(t, x) =$

$$= \begin{cases} \delta, & \text{если } |u| \leq \delta, \quad 0 < \delta \ll 1; \\ -\text{sign}(x_1 + x_2)s, & \text{если } |x_1 + x_2| > |x_3|, \\ & u \neq 0; \\ -\text{sign}(x_1 + x_2)\frac{1}{s}, & \text{если } |x_1 + x_2| \leq |x_3|, \\ & u \neq 0; \\ u_* = \arg \min_{u \neq 0} [(y^2 + u)^2 + u^{-2}], & \text{если} \\ & k(|x_1 + x_2| + |x_3|) < 1/s, \quad u \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

3. Алгоритм вычисления элементов последовательностей $\{u_s(t, x)\}$, $\{x(t, u_s)\}$, $s \in N$

1. На отрезке времени $[0, t_F]$ вводится равномерная сетка $\Lambda([t_s, t_F], N) =$

$$= \{t_j \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_N = t_F,$$

$$t_{j+1} = t_0 + j\Delta t, \quad \Delta t = (t_F - t_0)/N, \quad j = \overline{0, N-1}\}.$$

2. На каждом частичном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, N-1}$, производится замена времени t на τ по формуле $dt = d(u, x)d\tau$, где $d(u, x)$ вычисляется по формуле (7), причем $x(t_0) = x(\tau_0)$ в момент $t_0 = \tau_0 = 0$.

3. В момент τ_j на основе значений $x_k(\tau_j)$, $k = \overline{1, 3}$, по формуле (6) формируется аппроксимирующее программное управление

$$u_s(\tau, x) \equiv \text{const},$$

$$\tau \in \left[\frac{t_j}{d(u, x)}, \frac{t_{j+1}}{d(u, x)} \right], \quad \Delta t = d(u, x)\Delta\tau,$$

при этом u^* находится как решение уравнения $\frac{u^4 + y^2 u^3 - 1}{\sigma(u, y)} = 0$, доставляющее гло-

бальный минимум исследуемой функции:

$$u^0 < 0, \quad u^{k+1} = u^k - \frac{\sigma(u^k, y)}{\sigma_u(u^k, y)}, \quad k = \overline{0, M-1},$$

$$u_1 = u^M < 0, \quad u_2 = -\frac{1}{u_1},$$

$$u^* = \arg \min_{w \in \{u_1, u_2\}} [(y^2 + w)^2 + w^{-2}],$$

где $M = (k+1)$: $|u^{k+1} - u^k| \leq \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

4. Вычисляется евклидова норма на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$: $d(u_s = \text{const}, x) =$

$$= \sqrt{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)} = |f(x, u_s)| \quad (7)$$

(может быть использовано приближение $|f(x, u_s)| \approx \sqrt{2u_s^2 + u_s^{-2}}$).

5. Имеем вместо (2)-(4) систему:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u_s}{d(u_s)}, \quad (8)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \frac{(x_1 - x_2)^2 + u_s}{d(u_s)}, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{d(u_s)}{u_s}, \quad (9)$$

где $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ и вектор начальных условий задаем, учитывая только операцию деления на u_s в формуле (7).

6. На отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ при заданном j вводится равномерная сетка $\Lambda([\tau_j, \tau_{j+1}], L) =$

$$\{\tau_{jk} \mid \tau_j = \tau_{j,0} < \tau_{j,1} < \dots < \tau_{j,k} < \dots < \tau_{j,L} = \\ = \tau_{j+1}, \quad \tau_{j,k} = k(\tau_{j+1} - \tau_j)/L, \quad k = \overline{0, L}\}.$$

7. На сетке $\Lambda([\tau_j, \tau_{j+1}], L)$ выполняется L шагов метода Рунге-Кутты 4 порядка, причем на каждом шаге управление одно и то же.

8. Исследуя зависимость значений функционала (1), $I(u_s, x(\cdot, u_s))$, от набора параметров (N, L, k, s) , формируем аппрок-

симацию режима управления, которая позволяет приближаться к $\inf I(u, x)$ и дает реализуемое на практике управление.

Замечание. Набор параметров алгоритма (N, L, k, s) позволяет настраивать алгоритм реализации управления (6) под особенности прикладной модели (исполняющего механизма).

4. Вычислительный эксперимент

Алгоритм реализации аппроксимирующего управления запрограммирован авторами в системе *Compaq Visual Fortran 6.1*. Графическая визуализация выполнена средствами системы *Matlab 7*.

Далее представлены сравнительные результаты расчетов при различных наборах (N, L, k, s) .

1. При $x(0) = (0, 0.25, 0.25)$, $t_F = 3$, $\delta = 10^{-3}$, $N = 3000$, $L = 2$, $k = 25$, $s = 5$ получаем значение целевого функционала $I(u_s) = -0.2555$ и $x_3(t_F, u_s) = -3.9185 \cdot 10^{-3}$. Графики функций $x_i(t, u_s)$, $i = \overline{1, 3}$, представлены на рис. 1.

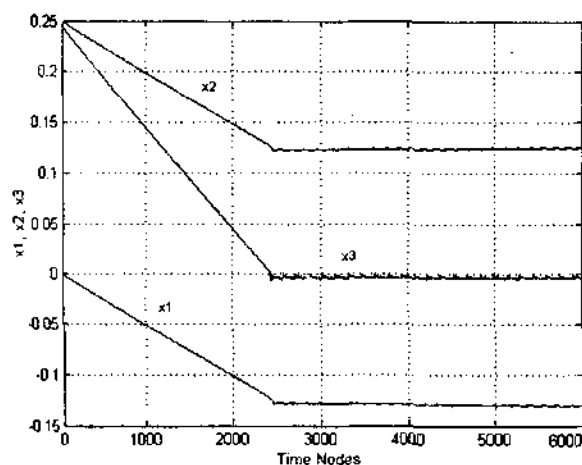


Рис. 1. Графики функций $x_i(t, u_s)$, $i = \overline{1, 3}$.

Пример показывает, что траектория, исходящая из точки $x(0) = (0, 0.25, 0.25)$, с помощью импульсного и релейного управления ($u(t) \equiv -5$) переходит в малую окрестность магистрального многообразия, и, далее, движение вблизи магистрали управляется функцией, значения которой переключаются с -1 на 5 с большой частотой (скользящий режим).

2. Пусть $x(0) = (0, 0, 0)$, $t_F = 3$, $\delta = 10^{-3}$, $N = 3000$, $L = 2$, $k = 5$. В таблице 1 приведены значения $I(u_s)$ и $x_3(t_F, u_s)$ при различных s .

Таблица 1. Зависимость значений $I(u_s)$, $x_3(t_F, u_s)$ от s ($x(0) = (0, 0, 0)$)

s	$I(u_s)$	$x_3(t_F, u_s)$
1	1.6817e-2	-0.1165
2	2.4049e-3	-4.9749e-2
3	7.3994e-4	-3.2833e-2
4	3.1917e-4	-2.3875e-2
5	1.6567e-4	-1.6300e-2
6	9.6820e-5	-1.4583e-2
7	6.0439e-5	-1.3786e-2
8	4.0628e-5	-1.0938e-2
9	2.8584e-5	-8.9444e-3
10	2.0846e-5	-8.0500e-3

Расчеты показывают, что (при неизменных прочих параметрах алгоритма) увеличение номера s ведет к улучшению аппроксимации управления.

Отмеченная зависимость наблюдается и для других начальных условий. Например, при $x(0) = (-0.25, 0.5, 1)$, $k = 0.3$ получаем результаты, приведенные в таблице 2.

Таблица 2. Зависимость значений $I(u_s)$, $x_3(t_F, u_s)$ от s ($x(0) = (-0.25, 0.5, 1)$)

s	$I(u_s)$	$x_3(t_F, u_s)$
2	-0.7418	0.7
3	-0.7429	0.5580
4	-0.7488	0.2867
5	-0.7518	0.1219
6	-0.7532	9.75e-3

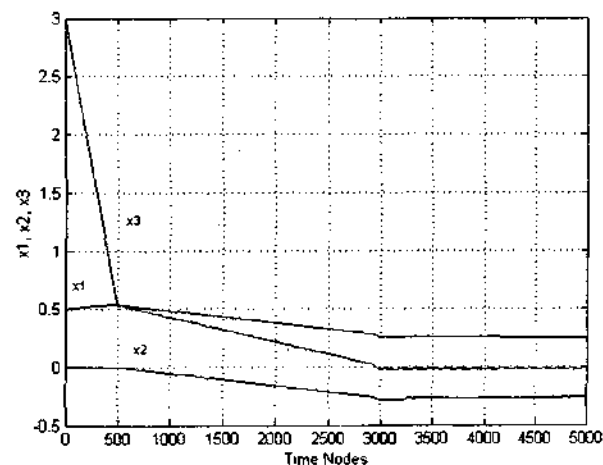


Рис. 2. Графики функций $x_i(t, u_s)$, $i = \overline{1, 3}$.

В завершение представим результаты расчетов для $x(0) = (0.5, 0, 3)$ при $t_F = 5$, $\delta = 10^{-3}$, $N = 5000$, $L = 1$, $k = 5$. При $s = 5$ имеем $I(u_s) = 0.5049$, $x_3(5, u_s) = -1.8581 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 2). При $s = 7$ $I(u_s) = 0.5022$, $x_3(5, u_s) = -1.2510 \cdot 10^{-2}$.

Заключение

В статье представлены алгоритм аппроксимации импульсного скользящего режима в типовой вырожденной задаче. Вычислительный эксперимент показал:

1) варьирование параметров алгоритма (N, L, k, s) позволяет регулировать реализацию управления (6), добиваясь меньших значений функционала $I(u_s, x)$, а также получая такой импульсный скользящий режим, который осуществим на практике;

2) характерную черту динамики системы, состоящую в наличии на отрезке времени $[t_S, t_F]$ «погранслоного» участка и движения вблизи магистрали.

Отметим направления улучшения программно-алгоритмической реализации подхода к вычислению обобщенного управления:

1) получение решения обобщенного уравнения Беллмана [3] аналитически с помощью систем, автоматически выполняющих аналитические вычисления (Maple, Mathematica, Reduce) или численно;

2) выведение набора, описывающего магистральное многообразие, и конструирование минимизирующей последовательности в автоматическом режиме;

3) разработка аппарата регулирования параметрами (N, L, k, s) алгоритма;

4) конструирование схемы учета фазовых ограничений (потоочечных и конечных).

Литература

1. Борисов В.Ф. Построение оптимального синтеза при наличии четтеринг-режима // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 302, № 4.
2. Гурман В.И., Батурин В.А. Построение и оценка приближенного синтеза оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1978, № 4. – С. 183-187.
3. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – 2-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 288 с.
4. Гурман В.И., Ухия М.Ю. Синтез оптимального управления в системах с неограниченным множеством скоростей // Дифф. уравнения. – 2005. – Т. 49. – № 11. – С. 1482-1490.
5. Дарьин А.Н., Куржанский А.Б., Селезнев А.В. Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифф. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 11. – С. 1491-1500.
6. Зеликин М.И., Зеликина Л.Ф. Структура оптимального синтеза в окрестности особых многообразий для аффинных по управлению задач // Матем. сб. – 1998. – Т. 189, вып. 10. – С. 33-52.
7. Красовский Н.Н., Теория управления движением. – М.: Наука, 1968.
8. Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с.
9. Куржанский А.Б. Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. I. Обыкновенные системы // Диф. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 12-22.
10. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управлением. – М.: Наука, 2005.
11. Моисеев Н.Н. Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. I, II // ЖВМ и МФ. – 1964, т. 4, № 3, с. 485-494; 1965, т. 5, № 1, с. 44-56.
12. Тяпушкин А.И., Моржин О.В. Алгоритм численного синтеза оптимального управления // Автоматика и телемехан. – 2007. (Принята к печати).
13. Хайпер Э., Нерсегг С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
14. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. – New York: Marcel Dekker, 1996.